Modelado y Simulación (505103009)
Tema 7. Contrastes poblacionales

Javier Vales Alonso
Grado en Ingeniería Telemática

2020

Universidad Politécnica de Cartagena

Tabla de contenido

¿Cómo estudiar esta unidad?

1. Haga una primera lectura de la unidad. Concéntrese en ver las ideas generales y el uso del contraste χ^2.
2. Haga una revisión más a fondo de los ejemplos presentados.
3. En caso de dudas, puede consultar los libros de referencia, o contactar con el profesor.

Introducción

Introducción

En el tema anterior, hemos visto técnicas que nos permiten calcular intervalos de confianza para los parámetros de una distribución. **Otro aspecto de interés es determinar si éstos tienen una "forma" concreta**. Por ejemplo, ¿el tiempo de respuesta en una cola G/G/k es una variable aleatoria exponencial? ¿las tiradas de un dado son uniformes?

En este tema estudiaremos cómo realizar **contrastes sobre poblaciones** mediante el uso del test estadístico χ^2.

Introducción (II)

Formalmente, se tratará de determinar si existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula:

$$\mathcal{H}_0 : X \sim \mathcal{D}_\theta$$

frente a la hipótesis alternativa trivial, para un nivel de significación α dado.

Dado un conjunto de muestras $\{X_1, \ldots, X_n\}$ **se aproximará la distribución de X mediante un histograma**, y **se calculará la divergencia con la forma teórica** (la propuesta por la hipótesis nula). **Si la divergencia supera un umbral** determinado, consideraremos que $\mathcal{H}_0$ **debe ser rechazada**.

Histograma

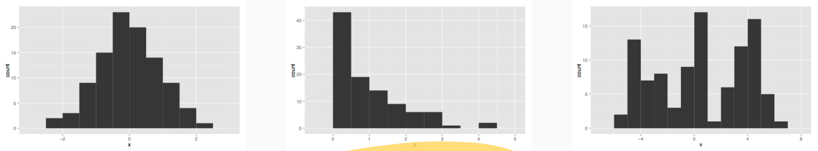
Histogramas

Un histograma es una representación aproximada de la distribución de una variable aleatoria. Se construye dividiendo el rango de posibles valores de la variable en **categorías** (*bins*) disjuntas. Típicamente se escogen K categorías equiprobables.

Por ejemplo, si $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, puede dividirse en $K{=}10$ intervalos: $\{(0, 0{,}1), [0{,}1, 0{,}2), \dots, [0{,}9, 1)\}$, cada uno de probabilidad $\frac{1}{10}$.

Determinadas las categorías C_k, para $k{=}1, \dots, K$, el histograma simplemente es el número de muestras que caen dentro de cada categoría, $o_k = \sum_{i=1}^{n} 1_{X_i \in C_k}$.

Histogramas (II)



Ejemplos de histogramas

Contraste χ^2

Contraste χ^2

El número de muestras esperado en cada categoría C_k bajo $\mathcal{H}_0 : X \sim \mathcal{D}_\theta$, es $e_k = np(X \in C_k) = n\mathcal{D}_\theta(C_k)$.

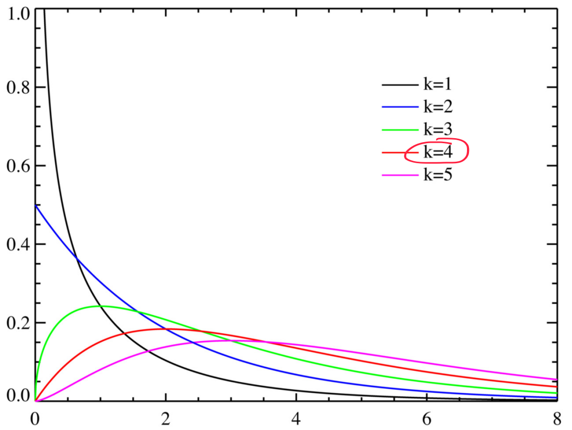
El contraste:

$$\boxed{\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}} \underset{n \to \infty}{\approx} \chi^2_{K-1}$$

tiene distribución χ^2 de $K - 1$ grados de libertad, si $n \to \infty$.

La hipótesis nula se rechaza si la discrepancia $\varepsilon^2 > \varepsilon^2_{max}$, siendo ε^2_{max} el valor de discrepancia máximo para el nivel de significación α dado. Éste se obtiene de las tablas de la distribución χ^2.

Contraste χ^2 (II)



Función de densidad de una variable χ^2 para distintos grados de libertad

Ejemplo 1: Se desea saber si para un proceso aleatorio, del que se ha obtenido un histograma con número de observaciones $O = (11, 14, 8, 5, 12)$ para las categorías $\{(0, 0{,}4), (0{,}4, 0{,}8), (0{,}8, 1{,}2), (1{,}2, 1{,}6), (1{,}6, 2)\}$, se puede rechazar o no $\mathcal{H}_0 : X \sim \mathcal{U}(0, 2)$ para un nivel de significación del 10 %.

$$e_i = \frac{n}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\alpha = 0.1 \Rightarrow \varepsilon^2_{max} = 7.78$$

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(e_i - o_i)^2}{e_i} = \frac{1 + 16 + 4 + 25 + 4}{10} = \frac{50}{10} = \underline{5}$$

$\rightarrow \varepsilon^2 = 5 < 7.78 = \varepsilon^2_{max} \Rightarrow$ NO RECHAZAMOS H_0

Contraste χ^2 (IV)

Ejemplo 2: Determinar, para los datos del ejemplo anterior, el nivel de significación máximo para el que no se rechazaría $\mathcal{H}_0$.