Modelado y Simulación (505103009)
Tema 5. Generadores de muestras de variables aleatorias

Javier Vales Alonso
Grado en Ingeniería Telemática

2020

Universidad Politécnica de Cartagena

Tabla de contenido

¿Cómo estudiar esta unidad?

1. Haga una primera lectura de la unidad. Concéntrese en ver las ideas generales y hacer una primera revisión de los algoritmos de generación de muestras de variables aleatorias.
2. Haga una revisión más a fondo de las propiedades matemáticas de dicho algoritmo.
3. Implemente en MATLAB los métodos solicitados en la práctica.
4. En caso de dudas, puede consultar los libros de referencia, o contactar con el profesor.

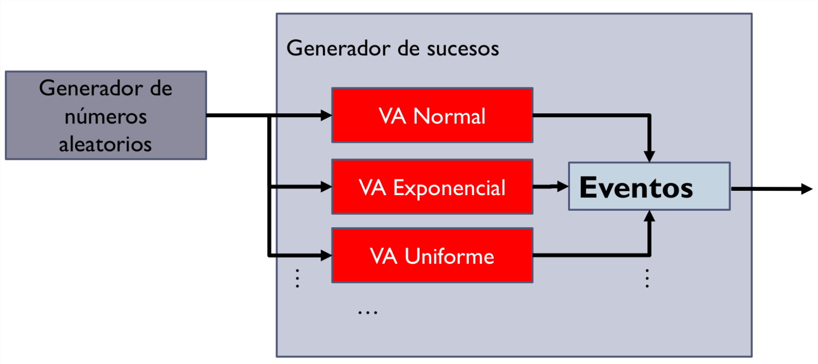
Introducción

Objetivo

El objetivo principal de este tema es **describir métodos para la obtención de muestras de variables aleatorias de diversos tipos** a partir de un generador $\mathcal{U}(0,1)$ como el construido en el tema anterior con el GCL.

Disponer de métodos de **generación de muestras de diversos tipos es esencial en simulación y otras áreas** ya que por lo general trabajaremos con variables aleatorias de naturaleza heterogénea, e.g., Exponenciales, Gaussianas, Bernoulli, Multinomiales, etc.

Objetivo (II)



Generador de sucesos
Generador de números aleatorios
VA Normal
VA Exponencial
VA Uniforme
Eventos

Objetivo (III)

Requisitos principales:

- **Exactitud**: las muestras deben ajustarse a la distribución objetivo.
- **Complejidad reducida**: tanto conceptual como de eficiencia.
- **Robustez**: eficientes para cualquier conjunto de valores de sus parámetros.
- **Número constante de muestras**: si el número de muestras es constante es posible aplicar técnicas de reducción de varianza.

Muestreo de variables aleatorias discretas

Muestreo de variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria X es discreta si toma valores en un conjunto finito o infinito numerable de números reales $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots\}$.

X toma valor v_i con probabilidad $p_i = p(X = v_i)$ (**función de masa de probabilidad**). Dada la función de masa puede calcularse también la **función de distribución** como:

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{v_i \in V : v_i \leq x} p(X = v_i) \tag{1}$$

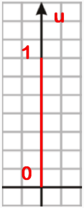
Dada la función de masa (o de distribución) el objetivo es **construir un algoritmo que proporcione muestras de X**.

Muestreo de variables aleatorias discretas (II)

Generador base: dado uniforme

Objetivo: muestreo de "moneda"

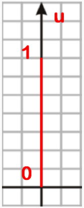
Muestreo de variables aleatorias discretas (III)



Generador base: $\mathcal{U}(0,1)$

Objetivo: muestreo de "moneda"

Muestreo de variables aleatorias discretas (IV)



Generador base: $\mathcal{U}(0, 1)$

Objetivo: muestreo de "dado"

Muestreo de variables aleatorias discretas (V)

La base del método de muestreo para variables aleatorias discretas consiste en realizar una **partición del intervalo** $(0,1)$ **en intervalos sucesivos de longitud** p_i. Es decir, una partición de la forma: $\{[0,p_1),[p_1,p_1+p_2),\ldots,[\sum_{j<i} p_j, \sum_{j\leq i} p_j),\ldots\}$.

Para generar la muestra x de X:

1. Se obtiene muestra u de variable U con distribución $\mathcal{U}(0,1)$.
2. Se busca el mayor $i > 0$ tal que $u \geq \sum_{j<i} p_j$ y $u < \sum_{j\leq i} p_j$, y se devuelve $x{=}v_i$.

Muestreo de variables aleatorias continuas

Muestreo de variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria continua X puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Al igual que el caso discreto, X está determinada por su **función de distribución**:

$$F_X(x) = p(X \leq x) \tag{2}$$

Si ésta es derivable, se puede obtener su **función de densidad**:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} \tag{3}$$

Y por el teorema central del cálculo:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

Muestreo de variables aleatorias continuas (II)

De modo análogo al caso discreto, dada la función de densidad (o de distribución) el objetivo es **construir algoritmos para proporcionar muestras de** X.

En el caso continuo existen una variedad de métodos que se adaptan a múltiples casuísticas, e.g., método de la transformada inversa, método de la convolución, método de aceptación-rechazo, etc.

Método de la transformada inversa

Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0,1)$. Dada la función de distribución $F_X(x)$, y sea $F_X^{-1}(x)$ su función inversa, entonces la variable aleatoria $F_X^{-1}(U)$ tiene distribución $F_X(x)$:

Demostración:

$$\begin{aligned} p(F_X^{-1}(U) \leq x) &= p(F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(x)) \\ &= p(U \leq F_X(x)) \\ &= F_U(F_X(x)) \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

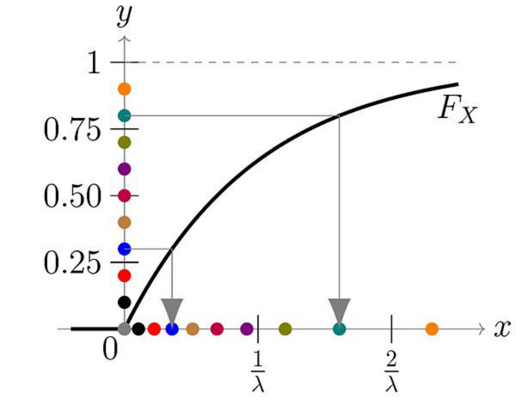
Método de la transformada inversa (II)

Este método permite entonces generar una muestra x de una variable aleatoria X con distribución $F_X(x)$ con los siguientes pasos:

1. Se obtiene muestra u de variable U con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$.
2. Se calcula $x = F_X^{-1}(u)$

Método de la transformada inversa (III)

Gráficamente el método es análogo al presentado para variables aleatorias discretas en la página 11.



Método de la transformada inversa (III)

Ejemplo 1:

Variable aleatoria exponencial de tasa λ: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$.

Método de la transformada inversa (IV)

Ejemplo 2:

Variable aleatoria distribución $\mathcal{U}(a, b)$.

Método de la composición

Sea $\mathcal{J}$ una colección numerable de índices, $\{p_j\}$ es una función de masa y $F_{X_j}(x)$ funciones de distribución para cada indice $j \in \mathcal{J}$. Entonces $F_X(x)$ dada por:

$$F_X(x) = \sum_{j \in \mathcal{J}} p_j F_{X_j}(x) \tag{5}$$

es una función de distribución, y sus muestras pueden generarse por el siguiente procedimiento:

1. Se obtiene muestra j de la variable discreta con masa $\{p_j\}$ y valores $\mathcal{J}$ (ver página 11).
2. Se toma como muestra x una muestra de la variable con distribución $F_{X_j}(x)$

Método de la composición (II)

Ejemplo 3:

Variable aleatoria con densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}$$

Método de la convolución

Sean f_X, f_Y y f_Z funciones de densidad que verifiquen:

$$f_X(x) = (f_Y * f_Z)(x) \tag{6}$$

Donde $*$ denota el operador de convolución. Entonces se cumple que $X = Y + Z$, siendo Y y Z independientes, y sus muestras pueden generarse por el siguiente procedimiento:

1. Generar muestra y de Y y z de Z.
2. Tomar como muestra $x = y + z$.

Método de la convolución (II)

Ejemplo 4:

Variable aleatoria con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, \ 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, \ 1 \leq x < 2 \\ 0, \ \text{otro caso} \end{cases}$$

Método de aceptación-rechazo

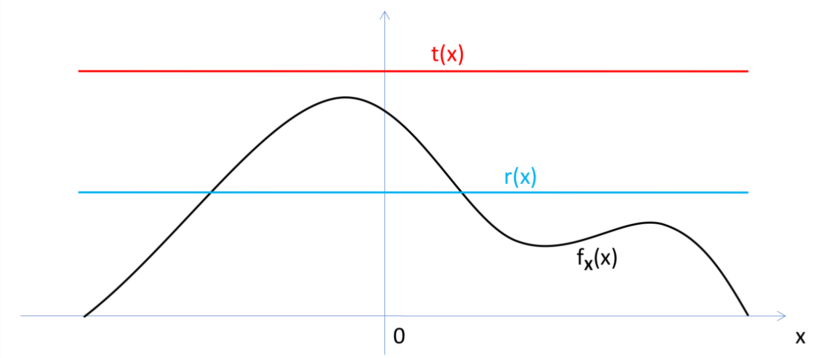
- Es un algoritmo de generación **exacto** (Von Neumann, 1951).
- Se emplea si los métodos anteriores no son factibles, o si poseen una baja eficiencia.
- El objetivo es generar muestra de una variable cuya densidad es f_X, para ello se escoge una función $t(x) \geq f_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y tal que su normalización $r(x)$ sea unitaria. Es decir:

$$r(x) = \frac{t(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} t(y) \mathrm{d}y} = 1 \tag{7}$$

- $r(x)$ es una función de densidad y $t(x)$ se ha escoger para que sea **simple** generar muestras de la variable correspondiente.

Método de aceptación-rechazo (II)

Ejemplo 5:



Método de aceptación-rechazo (III)

El procedimiento de generación es el siguiente:

1. Generar muestra y de variable con densidad $r(x)$.
2. Generar muestra u de variable U con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$.
3. Calcular $z = \frac{f_X(y)}{t(y)}$.
4. Ir al paso 1) mientras $u \leq z$
5. Tomar como muestra $x = y$